

## طريقة سبيل لحل مجموعة المعادلات الخطية

نكتب المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

نحسب  $x_1$  من المعادلة رقم 1 فنجد:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3]$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2]$$

نكتب المعادلات التكرارية بهذه الطريقة:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}]$$



يُعد الحل التقريبي يتقارب من الحل الحقيقي بعد عدد من التكرارات مع الطريقة السابقة.

أيضا هنا يتقارب الحل إذا كان به نظام  $\alpha > 1$ .

مثال:

أوجد حل للنسبة السابقة بطريقة سونك:

$$1.0x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 1.0x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + 1.0x_3 = 12$$

$$(0) \quad x = (0, 0, 0)$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{1.0} [12 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{1.0} [12 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{1.0} [12 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}]$$

$$X^{(1)} = \begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 \\ x_2^{(1)} = 1.8 \\ x_3^{(1)} = 2.72 \end{cases}$$

لنرمز الآن للحل الثاني اعتمادا على الحل الأول:

$$(2) \quad X = (0.9948, 1.0032, 1.005158)$$



(3)

$$X = (0.9996492, 1.00001628, 1.00003345)$$

$$X = B + \alpha X$$

بجانب الخطأ المرتكب بظروف التقريبات المتتالية فنحن لا نستطيع التاييد:

أولاً:

$$X = (x_1, x_2, x_3)$$

$$R = \|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{(k)}}{1 - \|\alpha\|} \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \quad (*)$$

$$X^{(0)} = \beta$$

أما إذا كان الحل المتكامل:

$$R = \|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{(k+1)}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\| \quad (**)$$

مثال:

لكن لنبدأ بحرية المعادلات الخطية التالية:

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 7$$

والحل هو:

أولاً: دراسة تقارب الحل للمعادلات التقريبية المتتالية

ثانياً: أمثلة على المعادلات السابقة بظروف تقريبية مختلفة

مستوى آخر:

$$X = \beta$$



مثلاً: أوجد قيمة الخطأ المرتكب بعد (9) تقريبات متتالية للحل  
بالمبدأ: أوجد عدد مرات التكرار لكي لا يتجاوز الخطأ المستقيم  
الحل:

$$x_1 = \frac{1}{8} [26 - x_2 - x_3]$$

$$x_2 = \frac{1}{5} [7 - x_1 + x_3]$$

$$x_3 = \frac{1}{5} [7 - x_1 + x_2]$$

وهنا هو الشكل:

$$X = \beta + \alpha X$$

$$\beta = \left( \frac{26}{8}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5} \right)^T \rightarrow$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

أثناء حساب الخطأ المرتكب نطبق المتباينة (\*) (\*)

ونكتب تقدم تقدر العظم لحساب  $\beta$

$$\|\alpha\|_I = \max_{j=1}^n |a_{ij}|$$

و  $1 \leq i \leq n$

$$\leq \max(0,25, 0,4, 0,4) = 0,4 < 1$$

باعتبار أنه  $\|\alpha\|_I < 1$  مما يحدد تقارب طريقة التقريرات المتتالية



### تحليل عددية 8.2 طرق

نستخدم هنا طريقة التكرارية المتتالية بطريقة الجاكوبي للحصول على

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8} [26 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5} [7 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5} [7 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)}]$$

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (2.9, 1.53, 1.53)$$

$$X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}) = (2.992, 1.526, 1.526)$$

وهكذا يمكننا الحصول على

النتيجة النهائية من خلال التكرار المتتالية بالشكل:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8} [26 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5} [7 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5} [7 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}]$$

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (2.9, 1.53, 1.53)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8} [26 - \frac{7}{5} - \frac{7}{5}] = 2.9$$



$$(1) \quad x_2 = \frac{1}{5} \left[ 7 - 2.9 + \frac{7}{5} \right] = 1.1$$

$$(1) \quad x_3 = \frac{1}{5} \left[ 7 - 2.9 + 1.1 \right] = 1.04$$

$$(2) \quad x_1 = \frac{1}{8} \left[ 26 - 1.1 - 1.04 \right] = 2.9825$$

$$(2) \quad x_2 = \frac{1}{5} \left[ 7 - 2.9825 + 1.04 \right] = 1.0115$$

$$(2) \quad x_3 = \frac{1}{5} \left[ 7 - 2.9825 + 1.0115 \right] = 1.0058$$

يمكننا ان نقوم بخطوة ع

باعتبار ان  $B$  هو الحد الاستراتيجي لحساب الخطأ المركب نستخدم:  
المتغير التالي

$$R \leq \frac{\| \alpha \|^{(k+1)}}{1 - \| \alpha \|} \cdot \| B \|$$

$$\| B \|_I = \max |x_i| = \frac{26}{8}$$

$$\| \alpha \|_I = 0.4$$

بالتبديل يكون الخطأ المركب:

$$R \leq \frac{(0.4)^{10}}{1 - 0.4} \left( \frac{26}{8} \right) = 0.001057314$$

النتيجة لتوجد بعدد لا بأس به التكرار فيها الحل يكون الاستمرار في الخطأ المركب



$$R \leq \frac{\| \alpha \|^{(k+1)}}{1 - \| \alpha \|} \cdot \| B \| \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$\frac{(0,4)^{(k+1)}}{1 - 0,4} \cdot \frac{26}{8} \leq \frac{1}{1000}$$

هذه المتراجحة فعمل على إيجاد  $k$  التي هي عدد مرات تكرار الخوارزمية العددية لحساب التفاضل والتكامل.

الطريقة العددية لحساب المستقيمات:

الطريقة العددية:

باستخدام كثيرة حدود نيوتن - غرينوير لحساب المستقيمات:

$$P_n(x_s) = y_0 + s \Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$$

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$h = |x_1 - x_0|$$

باستخدام قاعدة المتكامل:

$$P'_n(x_s) = \frac{d P_n(x)}{dx} = \frac{d P_n(x_s)}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{d P_n(x_s)}{ds} \cdot \frac{1}{h}$$

نلاحظ:



$$P'_n(x_s) = \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 - \left( \frac{2s-1}{2} \right) \Delta^2 y_0 + \frac{3s^2 - 6s + 2}{6} \Delta^3 y_0 + \dots \right]$$

$(s^2 - s)(s - 2)$   
 $\nearrow$   
 $s=0$

حسب المستطابق عن القيمة  $s=0$  نرى  $s=0$

$$P_n(x_0) = \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \dots \right]$$

$$f(x) \approx P_n(x) \Rightarrow f'(x) \approx P'_n(x)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \Delta^n y_0 \right]$$

مثال

أوجد مشتق الدالة التالية بطريقة نيوتن في  $x_0 = 1$

حدد هذه النقاط

$x_i$	-1	0	1	2	3
$y_i$	1	1	1	7	25

الحل:



تحليل عددية  $\Delta^2 y_i$  و  $\Delta^3 y_i$   
نشكل جدول الشروط:

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-1	1			
0	0	0	0	
1	1	6	6	0
2	7	6	6	
3	25	18	12	

$$f'(-1) \approx 1 \left[ 0 - \frac{1}{2} (0) + \frac{1}{3} (6) \right] = 2$$

$$f'(0) \approx 1 \left[ 0 - \frac{1}{2} (6) + \frac{1}{3} (6) \right] = -1$$

نفس الطريقة يمكننا إيجاد المشتقة الثانية والثالثة عند النقاط  $x_0$  باستخدام صيغة أخرى كالمعادلة الاستثنائية:

$$p_n''(x_s) = \frac{d p_n'(x_s)}{dx} = \frac{d p_n'(x_s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[ \Delta^2 y_0 + (s-1) \Delta^3 y_0 + \dots \right]$$



$$P''_n(x_0) = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots]$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} [\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots]$$

مثال:

أوجد المشتقة الثانية في المثال السابق عند النقطة  $x = -1$ .

$$f''(-1) = 1 [0 - 6] = -6$$

$$f''(0) = 1 [6 - 6] = 0$$

$$f''(1) = 1 [12] = 12$$

الطريقة الثانية:

المثال أعلاه:

إنه عبارة عن سلسلة لا نهائية يمكن التعبير عنها على شكل مجموع قيم الدالة فقط محدودة. يمكن إثباته غير صيغة بها التي يمكننا إثباته:

$$f'(x) \approx C_0 f_0 + C_1 f_1 + \dots + C_n f_n$$

تقريباً مساوية صيغة ما قبل أي كثيرة حدود تتجاوز  $n$  تكون التوابيع

لأن هذه السلسلة محدودة هذه العلاقة:

$$f'(x_0) \approx C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$$

وتقريباً مساوية ما قبل أي كثيرة حدود درجة لا تتجاوز الأولى.



$$f(x) = x^0 \Rightarrow a = C_0 + C_1$$

$$f(x) = x \Rightarrow 1 = C_0 x_0 + C_1 (x_0 + h)$$

هذه جملات معادلتين فقط بالمتغيرات  $C_0, C_1$  مع الجملتين  $x_0 \approx 1$  و  $x_0 \approx 0$

$$C_1 = \frac{1}{h}, \quad C_0 = -\frac{1}{h}$$

فإننا نحصل على:

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_0}{h}$$

وهذا التقدير الأول بدرجة الدقة في صيغة

مثال

أوجد مشتق الدالة  $f(x) = x^2$  في صيغة  $x_0 = 1$  باستخدام صيغة

المعادلة 8.2

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f_2 - f_1}{h} = 0$$

$$f'(1) = 2$$

لنفقد التسمية الدورية للاحقة عدد



$$(2) \quad f'(x_0) \approx C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2)$$

$$f(x) = x^0 \Rightarrow 0 = C_0 + C_1 + C_2$$

$$f(x) = x \Rightarrow 1 = C_0 x_0 + C_1 (x_0 + h) + C_2 (x_0 + 2h)$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow 2x_0 = C_0 x_0^2 + C_1 (x_0 + h)^2 + C_2 (x_0 + 2h)^2$$

هنا 3 معادلات و 3 مجهول وبإكمال المتسلسلة لهذه المعادلات نحصل على:

$$C_0 = \frac{-3}{2h}, \quad C_1 = \frac{2}{h}, \quad C_2 = \frac{-1}{2h}$$

بتعويض هذه القيم في (2) نحصل على التaylor التالي:

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

وهو ديفرنتيالي الدرجة الثانية بحدود 2:

$$f'(-1) \approx \frac{-3 + 4(1) - 1}{2} = 0$$

$$f'(0) \approx \frac{-3 + 4(1) - 7}{2} = -3$$

يمكن إيجاد مشتقات أكثر دقة بإعداد 4 أو 5 حدود وكلما كان عدد الحدود المأخوذة كلما كانت القيمة التقريبية للمشتق أقرب من القيمة الحقيقية.



تاریخ ۱۸/۸/۱۴۰۲

[illegible]

$$f''(x) \approx \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

$$f'''(x_0) \approx \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^2}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f_{n-k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

الطريقة التقريرية لحساب التكاليف

مع المعلوم أنه يمكن أن نكتب  $f(x) = y$  على المجال  $[a, b]$  هو عبارة عن  
مسألة لكل المعلوم  $y$  المتغير  $x$  الذي يحقق  $f(x) = y$  وكل  $x$  من المجال  
 $a \leq x \leq b$ ، وكل  $y$  يتحقق  $f(x) = y$  على المجال  $[a, b]$  مسافة  
المتغير  $x$  الذي يحقق  $f(x) = y$ ،  $a \leq x \leq b$ ، إذاً:



$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot f(a)$$

$$\approx (b-a) f(b)$$

نحسب الآن المجال  $[a, b]$  إلى  $n$  دالات متساوية والتي طولها  $h$ .

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

وبالتالي فإن مساحة المنطقة بين كل دالة يساوي مجموع المساحات الناتجة عن القيم

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx h [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

$$f(x_i) = f_i$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h [f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}]$$

$$I \approx h [f(x_0) + \dots + f(x_n)]$$

$$\int_a^b f(x) dx = h [f_0 + \dots + f_n]$$

لاحظ أن تكامل الدالة هو قيمة الدالة عند نقاط معينة فقط حيث  
صغيرة جداً، حساب الخطأ المتكبد كما هو الحال في الحقيقة تقريبية  
والحقيقية لتلك الدالة.



$$R_1 = \int_a^b f(x) dx - (b-a) f(a)$$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

فإذا كان  $x_0 = a$ ، فإن:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \dots$$

حيث  $x_0 = a$

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(a) + \dots$$

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(a) dx = \int_a^b (x-a) f'(a) dx + \dots$$

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a) f(a) = \int_a^b (x-a) f'(a) dx + \dots$$

$$R = \int_a^b (x-a) f'(a) dx + \dots$$

فإذا كان  $x_0 = a$ ، فإن:

$$R = f'(a) \int_a^b (x-a) dx + \dots$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} f'(a) + \dots$$

$$R = \frac{b-a}{2} f'(a) + \dots$$



مثال 1

أوجد بتقنية المستطيلات كمال التفاضل والتكامل الجبري  
الساحل. ما هي الخطأ المتركب السابق في هذه الحالة

$$\int_{-1}^3 f(x) dx \approx 1 [1 + 1 + 1 + 7] = 10$$

$$R = \frac{b-a}{2} h f'(x) = \frac{4}{2} (1) \max f'(x)$$

لمتقنة المستطيلات

$$S = \int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a)$$

نقطة النهاية  $[a, b]$

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \dots + (f_{n-1} + f_n)]$$

(مجموع التفاضل)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f_0 + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + f_n]$$

نفس الطريقة السابقة في الخطأ المتركب

$$R = \frac{b-a}{12} h^2 f''(x)$$



.....

مسألة

أوجد بتقريب شبه المنحرف التكامل السابق

$$\int_{-1}^3 f(x) dx \approx \frac{1}{2} (-1 + 2(0 + 1 + 2) + 3) = 4$$

انتهت المأمرة 8

بالقصر للسير

د